

УДК [330.45:519.8](075.8)
ББК 65в631я73-1
К89

Рецензенты:

*кафедра «Инвестиционная политика»
Российской экономической академии им. Г.В. Плеханова*
(зав. кафедрой академик, д-р техн. наук, проф. Е.А. Олейников);
профессор *В.И. Матвеев*
(кафедра «Высшая математика» РЭА им. Г.В. Плеханова)

Главный редактор издательства
кандидат юридических наук,
доктор экономических наук *Н.Д. Эриашвили*

Кузнецов, Борис Тимофеевич.
К89 Математика: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Б.Т. Кузнецов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2015. — 719 с. — (Серия «Высшее профессиональное образование: Экономика и управление»).

ISBN 5-238-00754-X

Агентство СІР РГБ

Учебник подготовлен в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальностям экономики и управления. В учебнике в систематизированном виде рассмотрены вопросы линейной алгебры с элементами аналитической геометрии, основы теории вероятностей, математической статистики и финансовой математики, а также основные экономико-математические методы и модели. Рассмотрение теоретических вопросов сопровождается большим количеством задач и примеров.

Для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления, аспирантов, преподавателей, а также специалистов по прикладной экономике и финансам.

ББК 65в631я73-1

ISBN 5-238-00754-X

© Б.Т. Кузнецов, 2002, 2004

© ИЗДАТЕЛЬСТВО ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

Воспроизведение всей книги или какой-либо ее части любыми средствами или в какой-либо форме, в том числе в Интернет-сети, запрещается без письменного разрешения издательства

Оглавление

Введение	3
Раздел I. Линейная алгебра и аналитическая геометрия	5
Глава 1. Операции над векторами и матрицами	6
1.1. Вектор	6
1.2. Умножение вектора на скаляр	6
1.3. Сложение векторов	7
1.4. Линейная комбинация векторов	8
1.5. Координаты точки	9
1.6. Умножение векторов	9
1.7. Выражения произведений векторов в прямоугольной декартовой системе координат	11
1.8. Матрицы	13
1.9. Определитель квадратной матрицы	15
1.10. Алгебра матриц	18
1.11. Обратная матрица	19
1.12. Ранг матрицы	20
Контрольные вопросы и задания	22
Глава 2. Система линейных алгебраических уравнений	24
2.1. Решение системы алгебраических уравнений по правилу Крамера и методом обратной матрицы	24
2.2. Общий вид системы линейных алгебраических уравнений	27
2.3. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса	28
2.4. Вычисление обратной матрицы методом Гаусса	33
2.5. Система линейных однородных уравнений	34
2.6. Собственные значения и собственные векторы матриц	37
Контрольные вопросы и задания	38
Глава 3. Основы аналитической геометрии	40
3.1. Направленные отрезки	40
3.2. Прямоугольная система координат	42
3.3. Деление отрезка в данном отношении	43
3.4. Угол наклона отрезка к оси абсцисс	45
3.5. Уравнение прямой	45
3.6. Условие перпендикулярности прямых	47
3.7. Угол между прямыми	47
3.8. Пучок прямых	48

3.9. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки	49
3.10. Расстояние от точки до прямой	52
3.11. Уравнение окружности	53
3.12. Уравнение эллипса	54
3.13. Уравнение гиперболы	56
3.14. Уравнение параболы	59
3.15. Уравнение плоскости в трехмерной системе координат	60
3.16. Уравнение прямой в пространстве	62
Контрольные вопросы и задания	65
Глава 4. Выпуклые множества точек и их свойства	69
4.1. Основные определения	69
4.2. Геометрический смысл решений неравенств	71
4.3. Основные свойства выпуклого множества точек	72
Контрольные вопросы и задания	75
Глава 5. Комплексные числа	76
5.1. Определение комплексного числа	76
5.2. Геометрическая интерпретация комплексного числа	76
5.3. Свойства комплексных чисел	77
5.4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа	78
5.5. Возведение в степень и извлечение корня	79
Контрольные вопросы и задания	81
Раздел II. Математический анализ	82
Глава 6. Числовые последовательности и функции	83
6.1. Определение числовой последовательности	83
6.2. Предел последовательности	83
6.3. Свойства пределов	85
6.4. Функция одной переменной и способы ее задания	86
6.5. Неявные функции	87
6.6. Сложные функции	88
6.7. Важнейшие классы функций	88
6.8. Обратные функции	91
6.9. Предел функции	94
6.10. Непрерывность и разрывы функции в точке	96
6.11. Основные свойства пределов	98
6.12. Определение производной и дифференциала	99
6.13. Основные правила дифференцирования	102
6.14. Производная высших порядков	105
6.15. Применение производных в экономическом анализе	106
6.16. Функции нескольких переменных	106

6.17. Представление функций в экономике	110
Контрольные вопросы и задания	110
Глава 7. Исследование функций	112
7.1. Точки экстремума	112
7.2. Необходимое условие максимума и минимума функции	112
7.3. Достаточные условия существования экстремума	114
7.4. Монотонность и выпуклость функций	117
7.5. Асимптоты функций	121
7.6. Правило Лопиталя	123
7.7. Построение графиков функций	127
7.8. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных	130
7.9. Градиент	133
7.10. Однородные функции	135
7.11. Экстремумы функции двух переменных	136
7.12. Условный экстремум	139
Контрольные вопросы и задания	144
Глава 8. Неопределенный и определенный интегралы	146
8.1. Первообразная функция и неопределенный интеграл	146
8.2. Основные свойства неопределенного интеграла	148
8.3. Интегрирование способом замены переменных	149
8.4. Интегрирование по частям	151
8.5. Определенные интегралы	152
8.6. Свойства определенного интеграла	154
8.7. Определенный интеграл как функция верхнего предела	156
8.8. Основная формула интегрального исчисления	158
8.9. Несобственные интегралы	161
8.10. Двойные и тройные интегралы	164
Контрольные вопросы и задания	167
Глава 9. Ряды	169
9.1. Определение числового ряда	169
9.2. Сходимость положительных рядов	172
9.3. Сходимость произвольных рядов	178
9.4. Функциональные ряды	181
9.5. Разложение функций в степенные ряды	184
Контрольные вопросы и задания	186
Глава 10. Дифференциальные уравнения	188
10.1. Дифференциальные уравнения первого порядка	188
10.2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными	189

10.3. Линейные дифференциальные уравнения	194
10.4. Уравнение Бернулли	196
10.5. Дифференциальные уравнения второго порядка	200
10.6. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	201
Контрольные вопросы и задания	207

Раздел III. Основы теории вероятностей и математической статистики **209**

Глава 11. Элементы теории вероятностей **210**

11.1. Основные понятия	210
11.2. Теоремы сложения и умножения вероятностей	212
11.3. Полная вероятность	215
11.4. Формула Байеса	215
11.5. Теорема о повторении опытов	216
11.6. Закон распределения случайной величины	218
11.7. Моменты распределения случайной величины	222
11.8. Типы законов распределения случайных величин	224
11.8.1. Закон равномерной плотности	224
11.8.2. Закон Пуассона	226
11.8.3. Нормальный закон распределения	227
11.9. Закон распределения системы случайных величин	231
11.10. Теория случайных процессов	239
Контрольные вопросы и задания	245

Глава 12. Основы статистики **247**

12.1. Статистика и ее задачи	247
12.2. Генеральная совокупность и выборка	248
12.3. Гистограмма. Статистическая функция распределения	249
12.4. Числовые характеристики выборочного распределения	252
12.5. Основные статистические распределения	254
12.6. Доверительные интервалы и доверительные пределы	256
12.6.1. Доверительный интервал для математического ожидания нормального распределения	256
12.6.2. Доверительный интервал для дисперсии нормального распределения	260
12.7. Определение закона распределения случайной величины	261
12.8. Исследование случайных зависимостей	265
12.9. Корреляционно-регрессионный анализ	266
12.10. Проверка предпосылок регрессионного анализа	267
12.11. Оценка качества регрессионной модели	268
12.12. Однофакторный корреляционно-регрессионный анализ	273

12.13. Многофакторный корреляционно-регрессионный анализ	281
12.13.1. Функция регрессии	281
12.13.2. Коэффициент множественной корреляции	289
12.13.3. Значимость коэффициента множественной корреляции	290
12.13.4. Матрица ковариаций	291
12.13.5. Значимость коэффициентов регрессии	295
12.13.6. Оценка степени линейной независимости факторов друг от друга	299
12.13.7. Оценка степени линейной взаимосвязи между зависимой переменной и каждым из факторов	300
12.13.8. Автокорреляция остатков	301
12.13.9. Доверительные интервалы регрессии и ошибка прогноза	302
Контрольные вопросы и задания	304
Раздел IV. Экономико-математические методы	307
Глава 13. Линейное программирование	308
13.1. Задача математического программирования	308
13.2. Типы задач линейного программирования	310
13.3. Задача линейного программирования для двух переменных	310
13.4. Выпуклые множества точек	310
13.5. Выпуклые множества в многомерном пространстве	317
13.6. Графический метод решения задач линейного программирования	320
13.7. Симплекс-метод решения задач линейного программирования	326
13.8. Симплекс-таблицы	333
13.9. Метод искусственного базиса	342
13.10. Целочисленное линейное программирование	347
13.11. Взаимно двойственные задачи линейного программирования	355
Контрольные вопросы и задания	360
Глава 14. Нелинейное программирование	363
14.1. Метод множителей Лагранжа	363
14.2. Классические методы определения экстремумов	369
14.3. Графический метод	372
14.4. Задача выпуклого программирования	375
14.5. Динамическое программирование.	
Математическая теория оптимального управления	378
14.5.1. Оптимальная стратегия замены оборудования	379

14.5.2. Оптимальное распределение инвестиций	384
Контрольные вопросы и задания	393
Глава 15. Игровые методы в экономике	395
15.1. Предмет и задачи теории игр	395
15.2. Матричные игры	396
15.3. Равновесная ситуация	398
15.4. Смешанные стратегии	402
15.5. Графические решения матричных игр	406
15.6. Правило доминирования	413
15.7. Решение игр с помощью линейного программирования	416
15.8. Игры с природой	425
15.9. Игры с ненулевой суммой	431
15.10. Кооперативные игры	439
Контрольные вопросы и задания	443
Глава 16. Методы сетевого планирования и управления	445
16.1. Графы	445
16.2. Система сетевого планирования и управления	448
16.3. Правила построения сетевых графиков	449
16.4. Временные параметры сетевых графиков	451
16.5. Резервы времени	454
16.6. Сетевое планирование при случайном характере продолжительности работ	458
16.7. Коэффициент напряженности работы	461
16.8. Анализ и оптимизация сетевого графика	462
Контрольные вопросы и задания	465
Глава 17. Системы массового обслуживания	466
17.1. Основные понятия теории массового обслуживания	466
17.2. Марковский случайный процесс	467
17.3. Потоки событий	468
17.4. Уравнения Колмогорова	469
17.5. Финальные вероятности состояния системы массового обслуживания	472
17.6. Процесс гибели и размножения	474
17.7. Система массового обслуживания с отказами	476
17.8. Одноканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью	480
17.9. Многоканальная система массового обслуживания с неограниченной очередью	483
17.10. Система массового обслуживания с ограниченной очередью	489
17.10.1. Одноканальная СМО с ограниченной очередью	489

17.10.2. Многоканальная СМО с ограниченной очередью	490
Контрольные вопросы и задания	492
Раздел V. Экономико-математические модели	493
Глава 18. Управление запасами	494
18.1. Оптимизация управления запасами	494
18.2. Статическая однономенклатурная детерминированная модель без дефицита	495
18.3. Статическая однономенклатурная детерминированная модель с дефицитом	499
18.4. Статическая многономенклатурная детерминированная модель без дефицита	503
18.5. Стохастическая однономенклатурная модель при случайной величине спроса	506
Контрольные вопросы и задания	507
Глава 19. Эластичность функции и ее применение в экономике	508
19.1. Определение эластичности функций	508
19.2. Основные свойства эластичности	509
19.3. Функции спроса и предложения	511
19.4. Применение эластичности в экономике	512
19.5. Налоговая политика и эластичности спроса и предложения	516
Контрольные вопросы и задания	519
Глава 20. Задача потребительского выбора	521
20.1. Функция полезности	521
20.2. Линии безразличия	522
20.3. Оптимизация функции полезности	524
20.4. Задача потребительского выбора для произвольного числа товаров	528
20.5. Уравнение Слуцкого	531
20.6. Кривые «доход—потребление»	535
20.7. Кривые «цена—потребление»	537
Контрольные вопросы и задания	539
Глава 21. Производственные функции	540
21.1. Определение производственной функции	540
21.2. Типы производственных функций	541
21.3. Свойства производственной функции	542
21.4. Мультипликативная производственная функция	543
Контрольные вопросы и задания	551

Глава 22. Поведение фирмы на рынке	552
22.1. Модели рыночных структур	552
22.2. Поведение фирмы в условиях совершенной конкуренции	553
22.3. Поведение фирмы в условиях монополии	566
22.4. Поведение фирмы в условиях несовершенной конкуренции	570
22.4.1. Равновесие Курно	573
22.4.2. Равновесие и неравновесие Стакельберга	575
Контрольные вопросы и задания	579
Глава 23. Модели экономического равновесия	580
23.1. Паутинообразная модель	580
23.2. Эффективность по Парето	584
Контрольные вопросы и задания	585
Глава 24. Модели межотраслевого баланса	586
24.1. Статические модели межотраслевого баланса в системе национальных счетов	586
24.2. Коэффициенты прямых и полных материальных затрат	591
24.3. Продуктивная матрица	595
24.4. Динамическая модель межотраслевого баланса	595
Контрольные вопросы и задания	599
Глава 25. Общие модели развития экономики	600
25.1. Факторы экономического роста	600
25.2. Модель Харрода—Домара	601
25.3. Модель Солоу	607
25.4. «Золотое» правило накопления	614
Контрольные вопросы и задания	617
Раздел VI. Финансовая математика	619
Глава 26. Простые и сложные процентные ставки	620
26.1. Принцип равноценности денег во времени	620
26.2. Простая процентная ставка наращенная	620
26.3. Сложные процентные ставки наращенная	622
26.4. Учетные ставки	626
26.5. Определение срока ссуды и величины процентной ставки	627
Контрольные вопросы и задания	628
Глава 27. Некоторые области использования процентных ставок	629
27.1. Эквивалентность процентных ставок	629

27.2. Учет инфляции	631
27.3. Конверсия валюты	635
27.4. Спотовые и форвардные процентные ставки	639
Контрольные вопросы и задания	644
Глава 28. Потоки платежей	645
28.1. Типы потоков платежей	645
28.2. Годовая рента	647
28.3. Ренты с начислением процентов по номинальной процентной ставке	649
28.4. Ренты с неоднократными выплатами в году	651
28.5. Рента с начислением процентов по номинальной процентной ставке и неоднократными выплатами в году	653
28.6. Ренты с выплатами в начале и середине периодов	657
28.7. Отложенные ренты	663
28.8. Вечные ренты	665
28.9. Определение параметров рент	666
28.10. Финансовая эквивалентность обязательств	675
Контрольные вопросы и задания	688
Глава 29. Погашение задолженности и доходность кредитных операций	689
29.1. Погашение задолженности по сложной процентной ставке	689
29.2. Погашение задолженности по простой процентной ставке	690
29.3. План погашения задолженности при использовании накопительного фонда	693
29.4. План погашения задолженности при погашении в рассрочку	695
29.5. Погашение долга равными срочными уплатами	696
29.6. Доходность ссудной операции при удержании комиссионных	698
29.7. Доходность потребительского кредита	699
29.8. Доходность долгосрочной кредитной операции с периодической выплатой процентов	702
29.9. Доходность долгосрочной кредитной операции с равными периодическими выплатами	706
Контрольные вопросы и задания	709
Библиографический список	710